



Wydział Mechaniczny Energetyki i Lotnictwa
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji



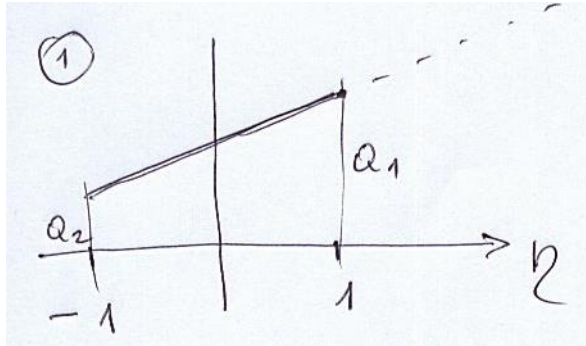
Metoda elementów skończonych (MES1)

Wykład 5B. Całkowanie numeryczne przykłady

03.2024

Przykład 1. Przypadek 1D

Analitycznie:



$$f(\eta) = \frac{a_1 - a_2}{2} \cdot \eta + \frac{a_1 + a_2}{2}$$

$$\int_{-1}^1 f(\eta) d\eta = \int_{-1}^1 \left[\frac{a_1 - a_2}{2} \cdot \eta + \frac{a_1 + a_2}{2} \right] d\eta =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{a_1 - a_2}{2} \cdot \eta^2 \Big|_{-1}^1 + \frac{a_1 + a_2}{2} \eta \Big|_{-1}^1 = 0 + \frac{a_1 + a_2}{2} (1 - (-1)) = a_1 + a_2$$

Numeryczne całkowanie z użyciem 1 p. Gaussa:

$$\int_{-1}^1 f(\eta) d\eta \quad \underline{\underline{(\eta_1 = 0; w_1 = 2)}}$$

$$= f(0) \cdot 2 = \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot 2 = a_1 + a_2$$

Stopień wielomianu	Liczba p. Gaussa	ξ_i	w_i
1	1	0	2
3	2	$-1/\sqrt{3}$ $+1/\sqrt{3}$	1 1
5	3	$-\sqrt{0.6}$ 0 $+\sqrt{0.6}$	5/9 8/9 5/9

Przykład. Przypadek 1D

Analitycznie: $f(\eta) = 2\eta^2 - 3$

$$\int_{-1}^1 f(\eta) d\eta = \int_{-1}^1 (2\eta^2 - 3) d\eta = \left. \frac{2}{3} \eta^3 - 3\eta \right|_{-1}^1 = \\ = \frac{2}{3} \cdot 2 - 3 \cdot 2 = \frac{4}{3} - 6 = -4\frac{2}{3}$$

Numeryczne całkowanie z użyciem 2 p. Gaussa:

$$\int_{-1}^1 f(\eta) d\eta = \sum_{i=1}^2 w_i \cdot f(\eta_i)$$

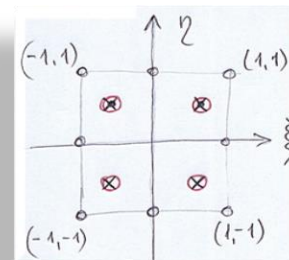
$$= 1 \cdot f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 1 \cdot f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) =$$

$$= 1 \cdot \left(2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - 3\right) + 1 \cdot \left(2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - 3\right) = \frac{2}{3} - 3 + \frac{2}{3} - 3 =$$

$$= \frac{4}{3} - 6 = -4\frac{2}{3}$$

Stopień wielomianu	Liczba p. Gaussa	ξ_i	w_i
1	1	0	2
3	2	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$ $+\frac{1}{\sqrt{3}}$	1 1
5	3	$-\sqrt{0.6}$ 0 $+\sqrt{0.6}$	5/9 8/9 5/9

Przykład. Przypadek 2D



Analitycznie:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\xi^3 + \xi \eta + \eta^2) d\eta d\xi =$$

$$= \int_{-1}^1 \left(\xi^3 \eta + \frac{1}{2} \xi \eta^2 + \frac{1}{3} \eta^3 \right) \Big|_{-1}^1 d\xi = \int_{-1}^1 \left(2\xi^3 + 0 + \frac{2}{3} \right) d\xi =$$

$$= \left(\frac{2}{4} \xi^4 + \frac{2}{3} \xi \right) \Big|_{-1}^1 = 0 + \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3}$$

Numeryczne całkowanie z użyciem 2x2 p. Gaussa:

St. Wielom.	L.p.G	ξ_i	W_i
1	1	0	2
3	2	$-1/\sqrt{3}$	1
		$+1/\sqrt{3}$	1

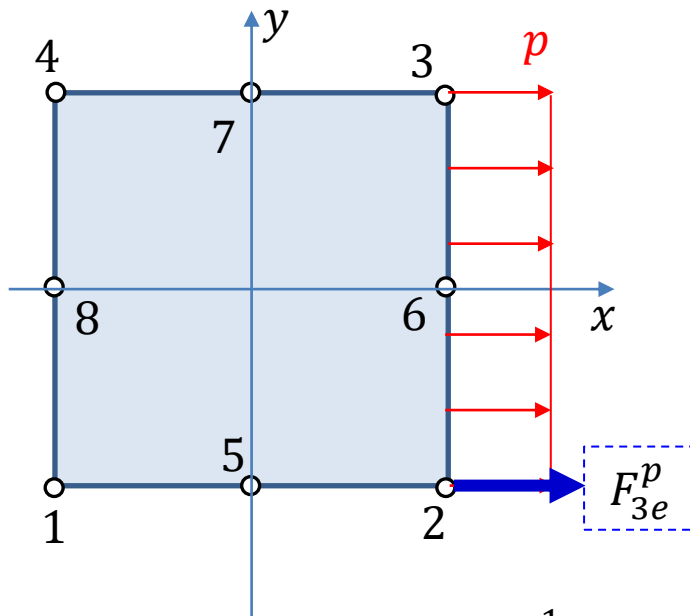
$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 W_i W_j f(\xi_i, \eta_j) \stackrel{+1/\sqrt{3}}{=} \dots$$

$$\Rightarrow 1 \cdot 1 \cdot f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 1 \cdot 1 \cdot f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 1 \cdot 1 \cdot f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 1 \cdot 1 \cdot f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) =$$

$$= \left[\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right] + \left[\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right] + \left[\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right] + \left[\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right] =$$

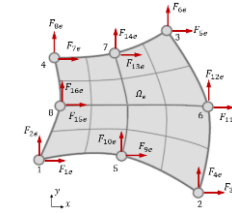
$$= \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

Przykład Wyznaczenie zastępczych sił w elemencie 8 (całkowanie analityczne vs numeryczne)



równoważny wektor obciążenia od obciążenia powierzchniowego:

$$[F^p]_e = t_e \int_0^l [p][N] ds$$



$$dy = \frac{l}{2} d\eta$$

$$F_{3e}^p = t_e \int_0^l p N_2 dy$$

$$N_2(1, \eta) = -\frac{1}{2}(1 - \eta)\eta$$

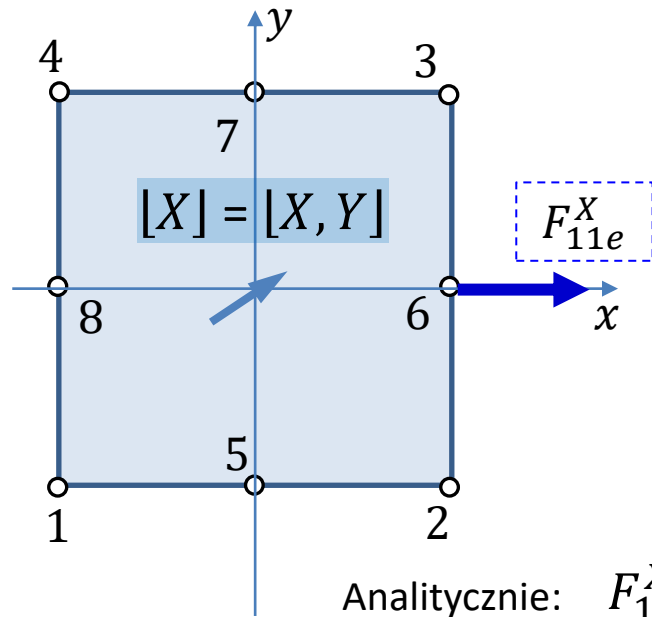
Analitycznie: $F_{3e}^p = t_e p \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{2}(\eta - 1)\eta \right] \frac{l}{2} d\eta = \frac{pl}{4} t_e \left(\frac{1}{3}\eta^3 - \frac{1}{2}\eta^2 \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{pl}{6} t_e$

Numeryczne całkowanie z użyciem 2 p. Gaussa:

dla 2 pkt. Gaussa: $\eta_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}; \eta_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} ; w_1 = w_2 = 1$

$$F_{3e}^p = \frac{1}{4} t_e pl \int_{-1}^1 (\eta - 1)\eta d\eta = \frac{1}{4} t_e pl \left[1 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} - 1 \right) \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right) + 1 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - 1 \right) \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right] = \frac{1}{4} t_e pl \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right] = \frac{pl}{6} t_e$$

Przykład Wyznaczenie zastępczych sił w elemencie 8 (całkowanie analityczne vs numeryczne)



równoważny wektor obciążenia od obciążenia masowego:

$$[F^X]_e = t_e \int_{A_e} [X][N] dA_e$$

$$F_{11e}^X = t_e \int_{A_e} X N_6 dA$$

$$N_6(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 + \xi)(1 - \eta^2)$$

Analitycznie: $F_{11e}^X = t_e X \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{2}(1 + \xi)(1 - \eta^2) \frac{l}{2} d\xi \frac{l}{2} d\eta = \frac{1}{3} t_e X l^2$

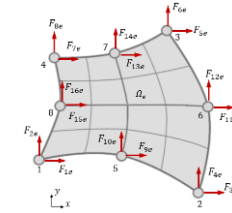
Numeryczne całkowanie z użyciem 2x2 p. Gaussa:

dla 2 pkt. Gaussa: $\xi_1 = \eta_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\xi_2 = \eta_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $w_1 = w_2 = 1$

$$F_{11e}^X = t_e \frac{l^2}{8} X \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (1 + \xi)(1 - \eta^2) d\xi d\eta =$$

$$= t_e \frac{l^2}{8} X \left[1 \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(1 - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right) + 1 \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(1 - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right) + \right.$$

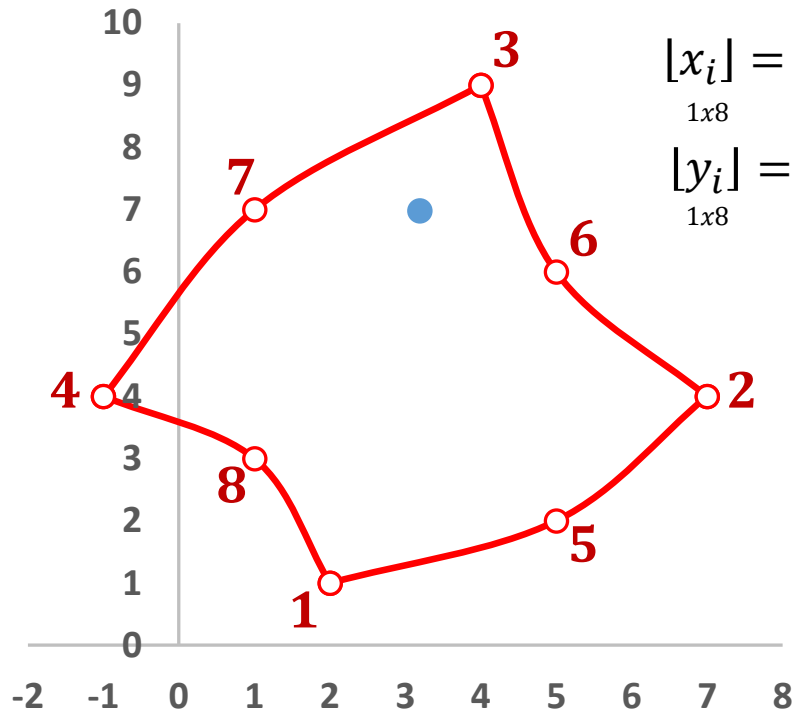
$$\left. + 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right) + 1 \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right) \right] = \frac{1}{3} t_e X l^2$$



$$dy = \frac{l}{2} d\eta$$

$$dx = \frac{l}{2} d\xi$$

Przykład. Element-8węzłowy, całkowanie numeryczne ($n=3$).
Znaleźć pole elementu i objętość V_0 .



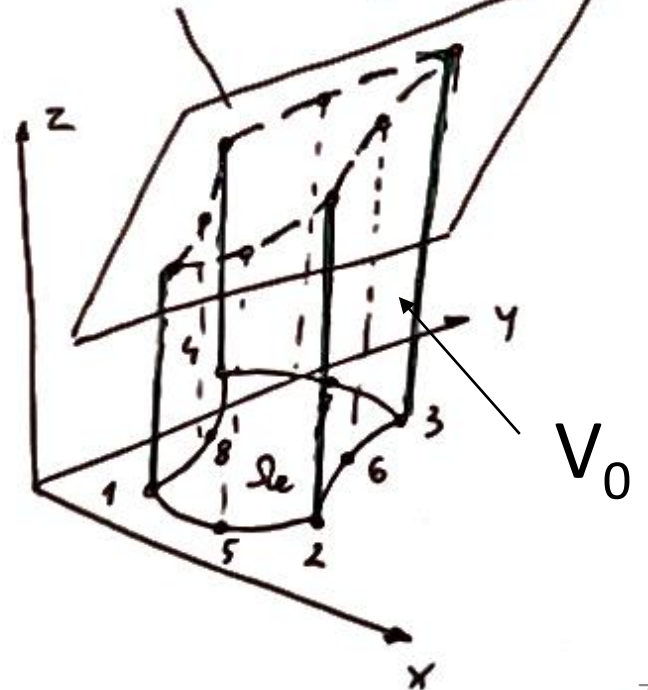
$$[x_i] = [2, 7, 4, -1, 5, 5, 1, 1];$$

1x8

$$[y_i] = [1, 4, 9, 4, 2, 6, 7, 3]$$

1x8

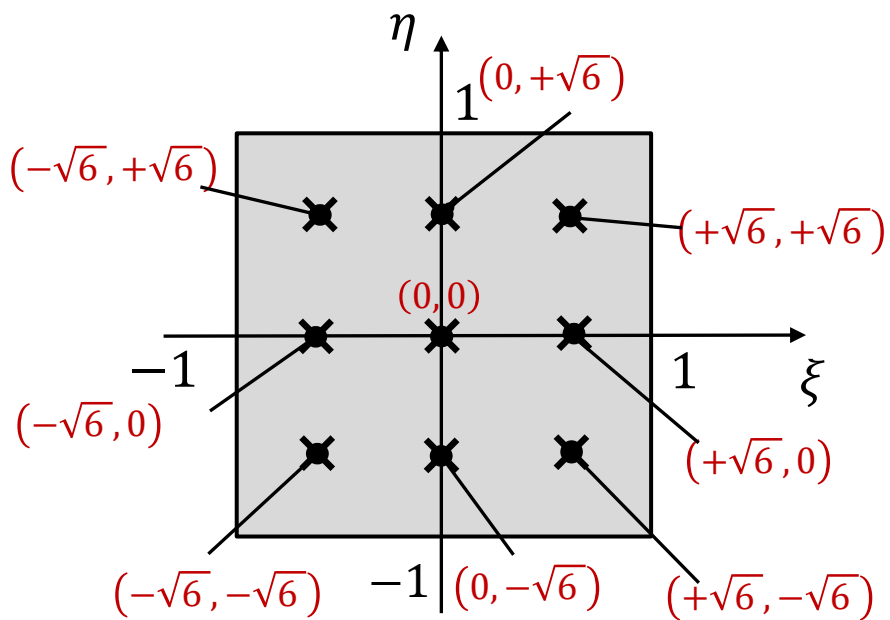
$$z = f(x,y) = \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y + 2$$



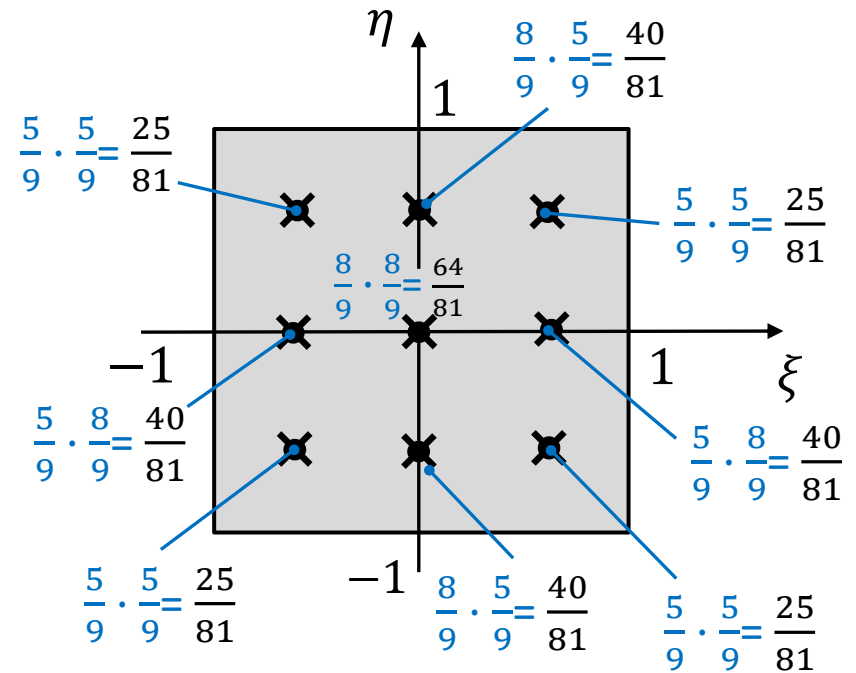
Przypomnienie: Reguła kwadratur Gaussa dla elementów 2D

$$n = 3 : \quad \xi_1 = \eta_1 = -\sqrt{0.6}, \quad \xi_2 = \eta_2 = 0, \quad \xi_3 = \eta_3 = \sqrt{0.6}$$

$$w_1 = w_3 = \frac{5}{9} ; \quad w_2 = \frac{8}{9}$$



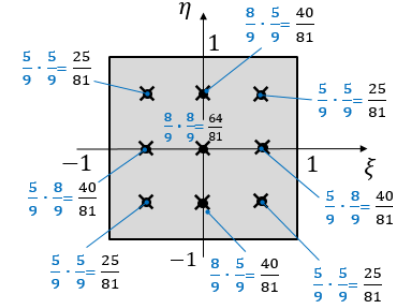
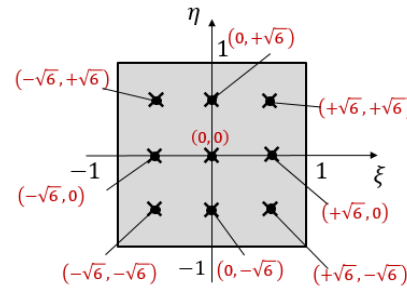
(ξ_i, η_j)



$w_i w_j$

Wyliczenie objętości

$$x = \underset{1 \times 8}{[N(\xi, \eta)]} \underset{8 \times 1}{\{x_i\}_e} \quad ; \quad y = \underset{1 \times 8}{[N(\xi, \eta)]} \underset{8 \times 1}{\{y_i\}_e}$$



$$V_0 = \iint_A f(x, y) dx dy =$$

$$= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y + 2 \right) \det[J(\xi, \eta)] d\xi d\eta =$$

$$= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2} [N(\xi, \eta)] \{x_i\} + \frac{2}{3} [N(\xi, \eta)] \{y_i\} + 2 \right) \det[J(\xi, \eta)] d\xi d\eta =$$

$$= \left| \det[J] = \left(\frac{\partial [N(\xi, \eta)]}{\partial \xi} \{x_i\}_e \right) \left(\frac{\partial [N(\xi, \eta)]}{\partial \eta} \{y_i\}_e \right) - \left(\frac{\partial [N(\xi, \eta)]}{\partial \xi} \{y_i\}_e \right) \left(\frac{\partial [N(\xi, \eta)]}{\partial \eta} \{x_i\}_e \right) \right| =$$

Obliczanie tego wyznacznika pokazane było w prezentacji **Wykład 04B**

$$= \left(\frac{1}{2} [N(-\sqrt{6}, -\sqrt{6})] \{x_i\} + \frac{2}{3} [N(-\sqrt{6}, -\sqrt{6})] \{y_i\} + 2 \right) \det [J(-\sqrt{6}, -\sqrt{6})] \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{5}{9} +$$

$$+ \left(\frac{1}{2} [N(0, -\sqrt{6})] \{x_i\} + \frac{2}{3} [N(0, -\sqrt{6})] \{y_i\} + 2 \right) \det [J(0, -\sqrt{6})] \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{5}{9} +$$

$$+ \left(\frac{1}{2} [N(\sqrt{6}, -\sqrt{6})] \{x_i\} + \frac{2}{3} [N(\sqrt{6}, -\sqrt{6})] \{y_i\} + 2 \right) \det [J(\sqrt{6}, -\sqrt{6})] \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{5}{9} +$$

$$+ \left(\frac{1}{2} [N(-\sqrt{6}, 0)] \{x_i\} + \frac{2}{3} [N(-\sqrt{6}, 0)] \{y_i\} + 2 \right) \det [J(-\sqrt{6}, 0)] \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{5}{9} +$$

$$+ \left(\frac{1}{2} [N(0, 0)] \{x_i\} + \frac{2}{3} [N(0, 0)] \{y_i\} + 2 \right) \det [J(0, 0)] \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{8}{9} + \dots = 220.4 \text{ mm}^3$$

Wyliczenie pola

$$A = \iint_A dx dy =$$

$$= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \det[J(\xi, \eta)] d\xi d\eta =$$

$$= \det \left[J(-\sqrt{6}, -\sqrt{6}) \right] \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{5}{9} + \det \left[J(0, -\sqrt{6}) \right] \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{5}{9} + \det \left[J(\sqrt{6}, -\sqrt{6}) \right] \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{5}{9} +$$

$$+ \det \left[J(-\sqrt{6}, 0) \right] \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{5}{9} + \det \left[J(0, 0) \right] \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{8}{9} + \det \left[J(0, \sqrt{6}) \right] \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{5}{9} +$$

$$+ \det \left[J(-\sqrt{6}, \sqrt{6}) \right] \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{5}{9} + \det \left[J(0, \sqrt{6}) \right] \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{5}{9} + \det \left[J(\sqrt{6}, \sqrt{6}) \right] \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{5}{9} = 33\,333 \text{ mm}^2$$

